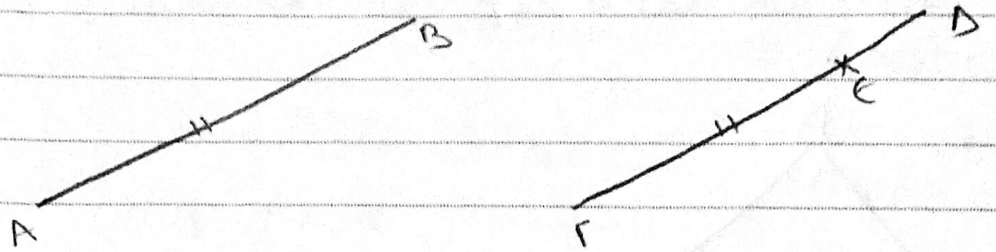
Διάλεξη
04-11-2019

ΕΥΚΛ. ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

Ορισμός: (μικρότερο ευθύγραμμου τμήματος)
Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγεται μικρότερο ενός ΓΔ (ΑΒ<ΓΔ) αν υπάρχει σημείο Ε : Γ*Ε*Δ έτσι ώστε ΑΒ=ΓΕ.

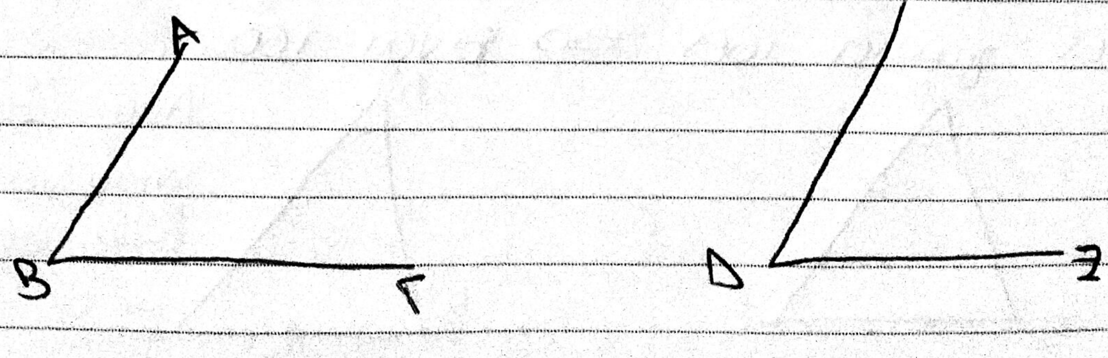


Ορισμός: (ισότητα ευθ. τμημάτων)
$\mathbb{R}^2$: Θεωρούμε τα σημεία $A=(\alpha_1,\alpha_2)$, $B=(\beta_1,\beta_2)$. Ορίζεται η απόσταση $d(A,B)$ τον αριθμό $d(A,B)=\sqrt{(\beta_1-\alpha_1)^2+(\beta_2-\alpha_2)^2}$
Ο αριθμός d ικανοποιεί τα I_1, I_2, I_3 (αξιώματα ισότητας)

- Τα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα αν $d(A,B)=d(\Gamma,\Delta)$

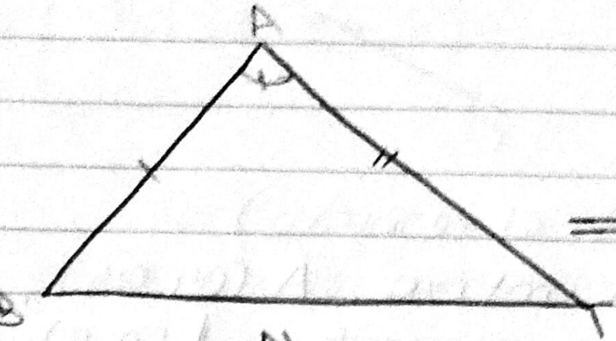
Αντίστοιχα έχουμε τρία αξιώματα ισότητας γωνιών.

Ι4) Δοθέντος γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ και ημιευθείας με αρχή το Δ υπάρχει μοναδική (ως προς ημιεπίπεδο) (στο πάνω ημιεπίπεδο που μπορούμε να βρούμε αυτή) ημιευθεία ΔΕ έτσι ώστε $A\hat{B}\Gamma = E\hat{\Delta}Z$

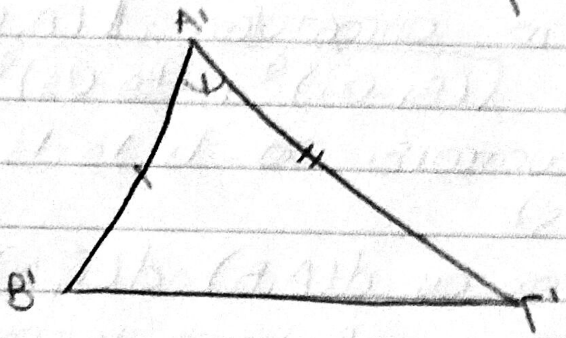


15) Αν για γωνίες α, β, γ ισχύει $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$ $\Rightarrow$ $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$

16) Θεωρούμε τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ ώστε
$AB=A'B'$
$A\Gamma=A'\Gamma'$
Επίσης μια γωνία είναι ίση με τον εαυτό της (και με αυτό λέγονται αντίστοιχα ισοσκελή)



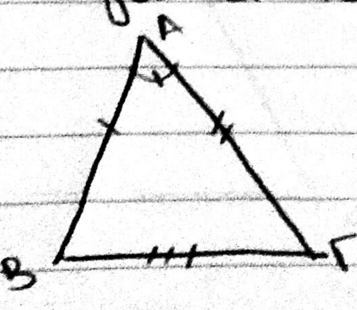
$\Rightarrow$ και οι γωνίες που περιέχονται σε αυτές τις πλευρές είναι ίσες: $\hat{B}=\hat{B'}$ $\wedge$ $\hat{\Gamma'}=\hat{\Gamma}$

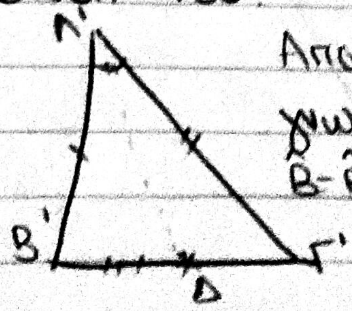


<u>Απόλυτη Γεωμετρία:</u>

Δύο πολύγωνα λέγονται ίσα αν έχουν 2 πλευρές-γωνίες αντιστ. ίσες

<u>Θεώρημα:</u> Αν 2 τρίγωνα έχουν ίσες 2 πλευρές τους (αντίστοιχα) και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες $\Rightarrow$ είναι ίσα.





Από 16 γνωρίζω ότι $\hat{B}=\hat{B'}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma'}$

Υποθέτω αντίθετα ότι $ΒΓ \neq Β'Γ'$ και χβγ $ΒΓ < Β'Γ'$

Από αξίωμα μικρότερου υπάρχει $Δ$ τ.ω $Β' * Δ * Γ'$: $ΒΓ = Β'Δ$

Βλέποντας τα τρίγωνα $Α\hat{Β}Γ$, $Α'\hat{Β'}Δ$

$$\begin{cases} ΑΒ = Α'Β' \text{ (υπόθεση)} \\ \hat{Β} = \hat{Β'} \quad (Ι_6) \\ ΒΓ = Β'Δ \quad (Ι_4) \end{cases} \xRightarrow{(Ι_6)} Β\hat{Α}Γ = Β'\hat{Α'}Δ$$

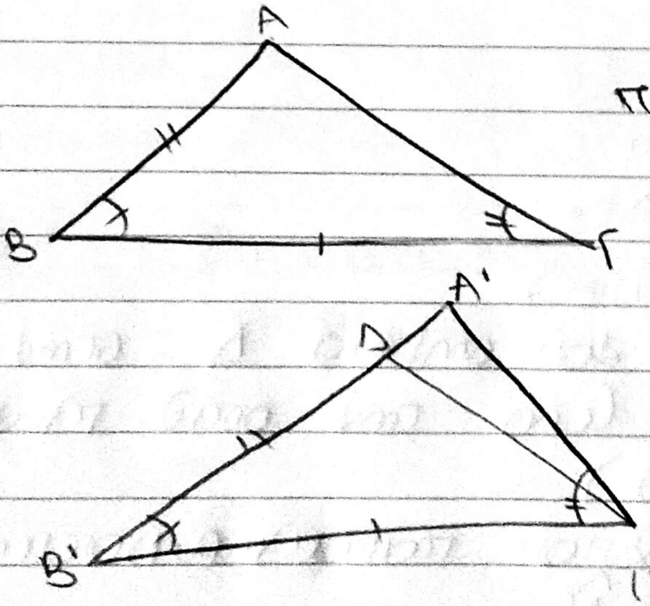
Από υπόθεση $Β\hat{Α}Γ = Β'\hat{Α'}Γ'$

$\xRightarrow{(Ι_5)} Β'\hat{Α'}Δ = Β'\hat{Α'}Γ'$ άτοπο στο $Ι_4$.

Από $Α'$ έχω 2 ημιευθείες $Α'Δ$, $Α'Γ$

__Θεώρημα:__ (2ο κριτήριο ΠΓΠ)

Δυο τρίγωνα που έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκ. σε αυτή γωνίες ίσες είναι ίσα.



Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα αρκεί νδο $ΑΒ = Α'Β'$

Έστω τυχ. χβγ $ΑΒ < Α'Β'$

Από $(Ι_1)$ $\exists\, Δ$: $Α' \neq Δ \neq Β'$ έτσι ώστε $ΑΒ = ΔΒ'$

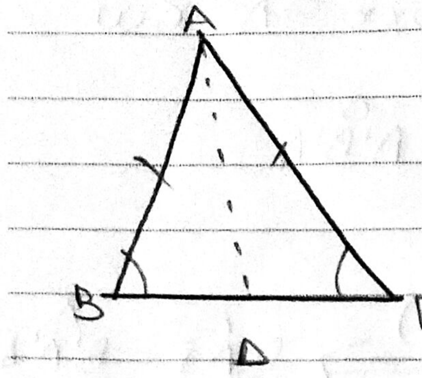
$\xRightarrow{(Θ.)} Α\hat{Β}Γ = Δ\hat{Β'}Γ'$

$\Rightarrow Α\hat{Γ}Β = Δ\hat{Γ'}Β'$ $\xRightarrow{Ι_5}$

υποθέτω $Α\hat{Γ}Β = Α'\hat{Γ'}Β'$

$\xRightarrow{Ι_5} Α'\hat{Γ'}Β' = Δ\hat{Γ}Β$ (άτοπο)

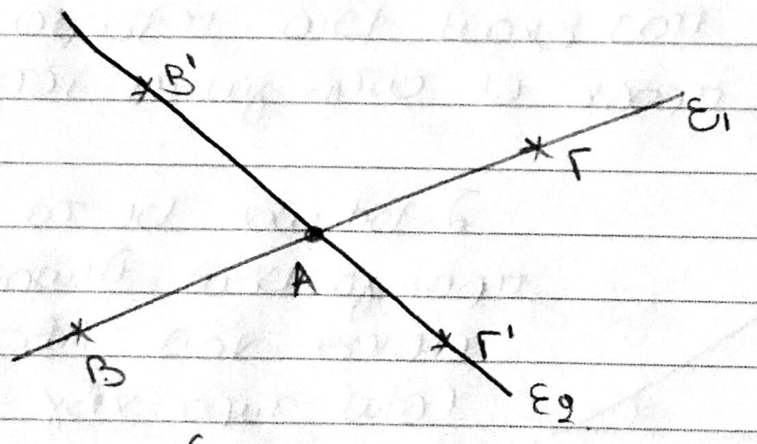
Πόρισμα: Σε ισοσκελές τρίγωνο οι προσ. τη βάση γωνίες είναι ίσες.



Φέρω διχοτόμο $\Rightarrow$
$A\overset{\triangle}{B}\Delta = A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma \Rightarrow \hat{B}=\hat{\Gamma}$

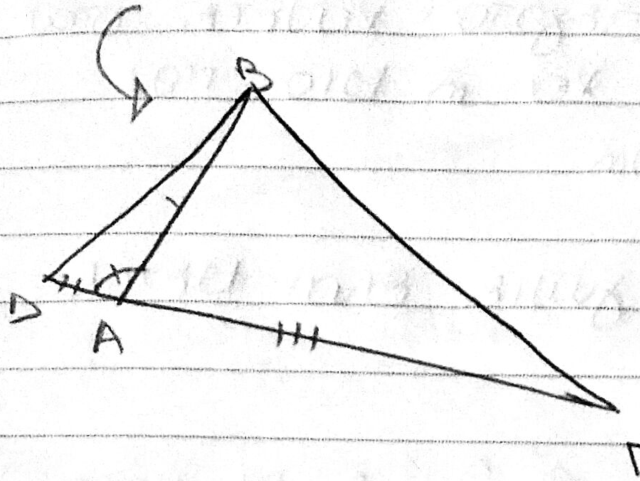
(ΑΔ κοινή
ΑΒ=ΑΓ υπόθ.
$B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$)

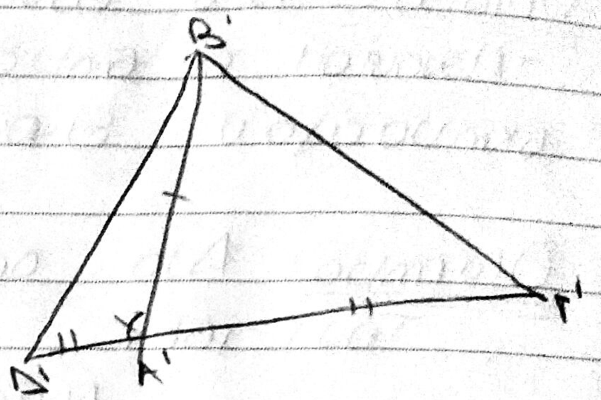
Ορισμός: (κατά κορυφήν γωνίες)
Έστω τεμνόμενες ευθείες (ε_1) και (ε_2) σε μοναδικό σημείο Α. Θεωρούμε σημεία Β,Γ στην (ε_2): Β*Α*Γ και σημεία Β',Γ' στην (ε_2): Β'*Α*Γ'. Οι γωνίες $B'\hat{A}B$, $\Gamma'\hat{A}\Gamma$ λέγονται κατά κορυφή
(αντ. $B'\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}\Gamma'$)



Ορισμός: (παραπλ. γωνίες)
Έστω γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση από ΑΓ (από την αντιθ. πλευρά του Γ) (Α,Δ,Γ: συνευθ.)
Η γωνία $B\hat{A}\Delta$ καλείται παραπληρωματική γωνία της $B\hat{A}\Gamma$

Πρόταση: Έστω οι παραπλ. γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}\Delta$ και έστω οι παραπλ. γωνίες $B'\hat{A}'\Gamma' = B'\hat{A}'\Delta'$ αν $B\hat{A}\Delta = B'\hat{A}'\Delta'$ $\Rightarrow$ $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma'$





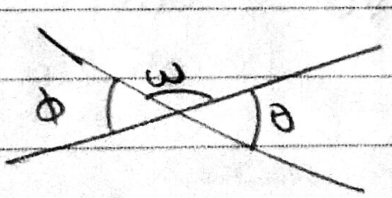
Αρχικά συγκρίνω $A\hat{\Delta}B = A'\hat{\Delta}'B$ $\left(\begin{array}{l} B\hat{A}\Delta = B'\hat{A}'\Delta' \\ A\Delta = A'\Delta' \\ AB = A'B' \end{array} \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \\ \Delta\Gamma = \Delta'\Gamma' \\ \Delta B = \Delta' B' \end{cases}$

Παρατηρώ ότι $B\hat{\Delta}\Gamma = B'\hat{\Delta}'\Gamma'$ $\Rightarrow \begin{cases} B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \end{cases}$

Παρατηρώ ότι $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma$
άρα $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma'$

Πρόταση: Οι κατακόρυφες γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες



ϕ, ω : παραπληρωματικές

θ, ω : ———— " ————

$\hat{\omega} = \hat{\omega}$ (Ι5)

Πρόταση $\Rightarrow$ $\hat{\phi} = \hat{\theta}$

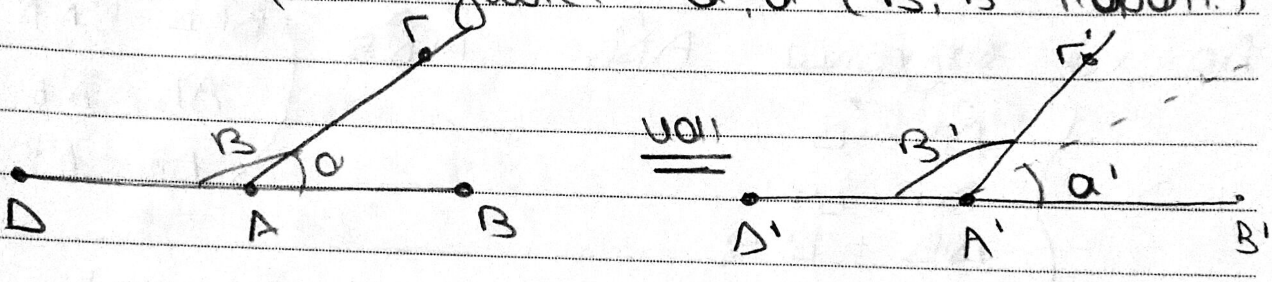
Ορισμός: Μια γωνία καλείται ορθή αν και μόνο αν είναι ίση με την παραπληρωματική της

Ορισμός: Δύο ευθείες λέγονται κάθετες όταν τέμνονται σε σημείο Α και η μια που σχηματίζουν είναι ορθή

Θεώρημα: Δύο ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.

Αποδ.

Έστω οι ορθές γωνίες $\hat{a}$, $\hat{a}'$ (β, β' παραπ.)



$\hat{a}=\hat{\beta}$ και $\hat{a}'=\hat{\beta}'$

Θδο $\hat{a}=\hat{a}'$. Έστω αντίθετα $\hat{a}\neq\hat{a}'$ και χβγ $\hat{a}<\hat{a}'$

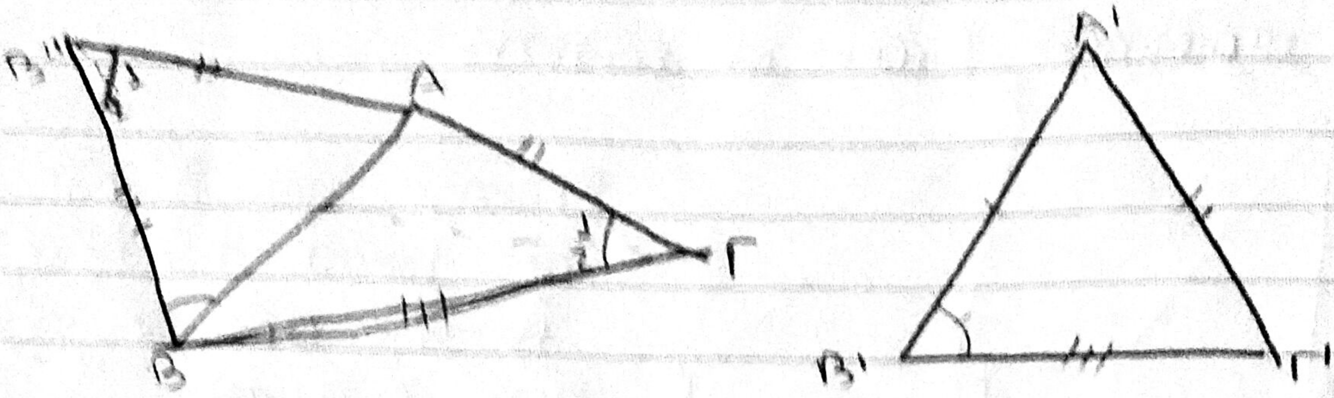
άρα υπάρχει ημιευθεία $A'E'$: $\hat{E'A'B'}=\hat{\Gamma A B}=\hat{a}$

Παρατηρώ ότι $A'\Gamma'$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\hat{E'A'\Delta'}$ $\Rightarrow$ $\hat{\beta}' < \hat{E'A'\Delta'} = \hat{\beta}$

$\hat{a}$ ~ (ως παραπλ. γωνίες)

$\Rightarrow$ $\hat{a}' < \hat{a}$ άτοπο $\Rightarrow$ $a=a'$ άρα 2 ορθές είναι ίσες μεταξύ των

Θεώρημα: Αν 2 τρίγωνα έχουν ίσες δύο προς δύο τις πλευρές τους => αυτά είναι ίσα.



Από (I_4) φέρνω ημιευθεία από Β έτσι ώστε $A\hat{B}B'' = A'\hat{B}'\Gamma'$

και (I_4) όπου B'' έτσι ώστε $BB'' = B'\Gamma'$

$\Rightarrow A\hat{B}B'' = A'\hat{B}'\Gamma'$

άρα $AB'' = A'\Gamma' = A\Gamma$

$A\hat{B''}B = A\hat{\Gamma}B$ (το $A\hat{B''}\Gamma$ ισοσκ. $\hat{B}''_1 = \hat{\Gamma}_1$; το $B\hat{B''}\Gamma$ ισοσκ. $\hat{B}''_2 = \hat{\Gamma}_2$)

$\Rightarrow \hat{B}'' = \hat{\Gamma}$: (1)

αλλά επίσης $A\hat{B''}B = A'\hat{B}'\Gamma'$: (2)

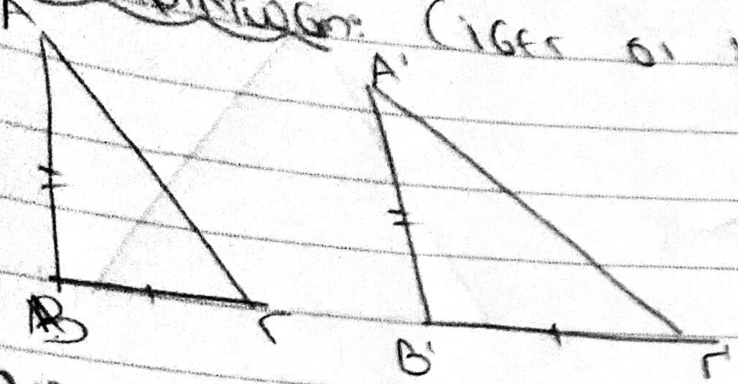
Από (1) κ' (2) $\Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και από υποθ.

$\left\{ \begin{array}{l} A\Gamma = A'\Gamma' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array} \right. \overset{\Pi\Gamma\Pi}{\Longrightarrow}$ από το ζητάμε

Ορισμός: Ένα τρίγωνο καλείται ορθογώνιο αν 2 πλευρές του σχηματίζουν ορθή γωνία.

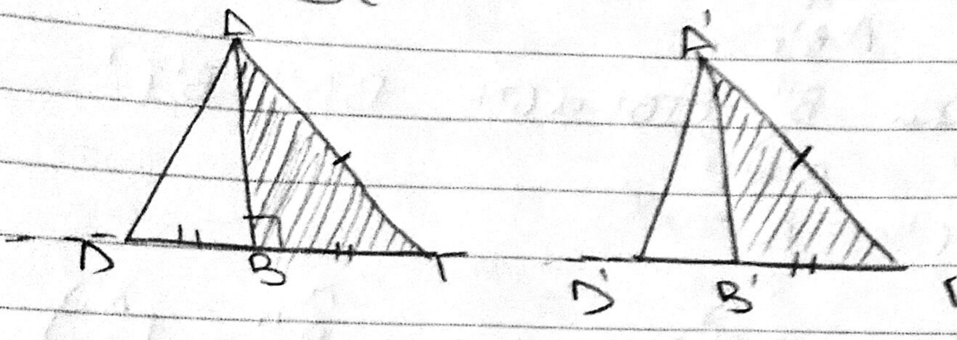
Θεώρημα: Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν είναι 2 πλευρές τους ίσες

1η περίπτωση: (ίσες οι κάθετες)



Είδαμε ότι 2 ορθές ίσες μεταξύ των άρα $\hat{B} = \hat{B}'$ άρα από ΠΓΠ είναι ίσα

2η περίπτωση: (ίσες υποτείνουσες και καθ.)



Η προέκταση της ΓΒ θέτω σημείο Δ: ΒΔ=ΒΓ

Ομοίως Δ' έτσι ώστε Β'Δ' = Β'Γ' (2)

Κοιτάμε $A\hat{\Delta}B$, $AB\hat{\Gamma}$ => { ΔΒ = ΒΓ, ΑΒ κοινή, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ κάθετες ορθές }

και κάθε ορθή = παραλ. => ΑΔ = ΑΓ

και ομοίως Α'Δ' = Α'Γ'

άρα ΑΓ = Α'Γ'

(1), (2), (3) => ΑΔ = Α'Δ' => παρατηρώ ότι

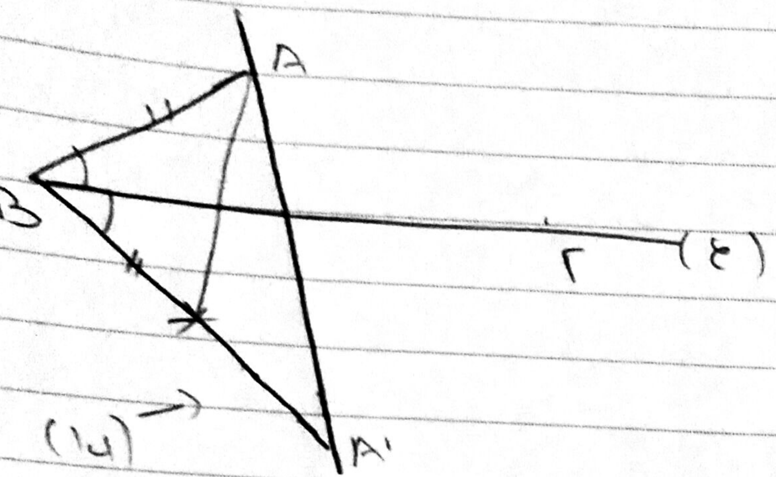
$A\hat{\Delta}\Gamma = A'\hat{\Delta}'\Gamma'$ (ΠΠΠ)

=> $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

άρα τα $A\hat{B}\Gamma = A'\hat{B}'\Gamma'$

ίσα

Πρόταση: Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται καθέτη προς τη ευθεία αυτή



Στο άλλο ημιεπίπεδο της (ε) που δεν περιέχει το A θεωρώ σημείο A':
$BA' = BA$ και $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A'$

* Σχηματίζω γωνία $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A'$ και στο (14) θεωρώ σημείο A'

Τότε $B\Delta A = B\Delta A$ => $B\Delta A = B\Delta A$ και παραπληρωματικές και ορθές => η $AA' \perp (\varepsilon)$.